
Module

Rechtlijnige trillingen in Machines

Submodule Systemen met meerdere vrijheidsgraden

Inhoudstabel

1. Systemen met 2 vrijheidsgraden - konservatief systeem - demping - dynamische trillingsdemper - gedwongen trillingen

Doel

De theorie, van rechtlijnige trillingen , wordt hier uitgebreid tot systemen met meerdere vrijheidsgraden. Allereerst worden systemen met 2 vrijheidsgraden bestudeerd. In het bijzonder wordt een werking van de dynamische trillingsdemper bestudeerd alsmede het trillingsgedrag van een voertuigkoetswerk.

1. SYSTEMEN MET TWEE VRIJHEIDSGRADEN

Tot nu toe werden enkel systemen met 1 vrijheidsgraad behandeld. Dit is voldoende om een hele reeks praktische problemen aan te vatten, zoals :

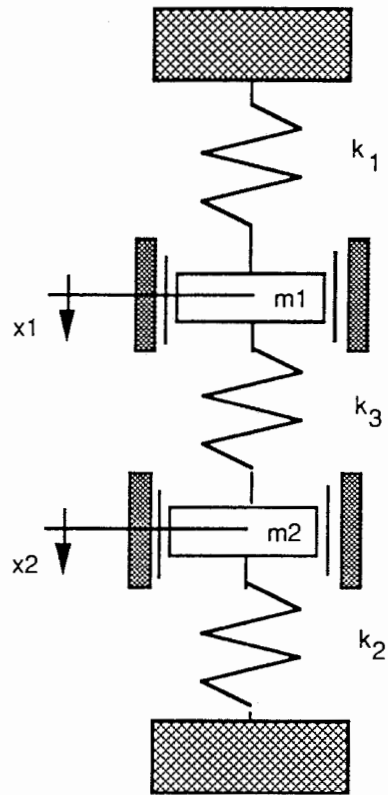
- het resonantieverschijnsel in bepaalde machine, als deze als één geheel trilt op haar fundering;
- het meten van trillingskarakteristieken;
- het berekenen van trillingsisolatie.

In de werktuigkunde vinden we echter ook machines of machineonderdelen, waarvan de bewegingen, en de werking enkel kan bestudeerd worden, door het als een systeem met twee vrijheidsgraden te beschouwen, zoals :

- dynamische trillingsdemper;
- torsie trillingsdemper;
- een voertuig op de weg e.d.
- een machine op een elastische fundering

Uit de cursus "Rationele Mechanica" [3] weten we dat :

- a) het aantal vrijheidsgraden van een systeem (afkorting V.G.) gelijk is aan het aantal onafhankelijke coördinaten, die nodig zijn om de beweging van het systeem te beschrijven.
Een niet-ontaard systeem met n V.G. zal n eigenfrequenties hebben die de beweging karakteriseren.
- b) indien geen uitwendige periodieke krachten aangrijpen zal het systeem vrije trillingen uitvoeren op de natuurlijke of eigenfrequenties van het systeem. De beweging is dan een lineaire combinatie van bewegingen met als trillingsfrequentie één van de eigenfrequenties van het systeem.
- c) Onder bepaalde beginvoorwaarden kan het systeem een harmonische beweging uitvoeren met frequentie gelijk aan één der eigenfrequenties. In dergelijk geval zegt men dat het systeem een hoofdtrilling ondergaat.
- d) Het aantal hoofdtrillingsvormen komt overeen met het aantal eigenfrequenties, en dus met het aantal V.G. De algemene beweging kan beschreven worden als een superpositie van eigenmodes.



figuur 1.1 : Model met 2 vrijheidsgraden x_1 en x_2

1.1 Vrije trillingen van een conservatief systeem met twee massa's, ieder met één vrijheidsgraad, zonder demping.

Beschouwen we een systeem bestaande uit 2 massa's m_1 en m_2 opgehangen met behulp van 3 veren tussen 2 vaste punten. Er is geen demping (Fig.1.1).

We onderstellen dat de massa's door leibanen zonder wrijving geleid worden en dus slechts in 1 richting kunnen bewegen : de positie van iedere massa wordt dan door 1 coördinaat beschreven :

→ x_1 en x_2 gemeten vanuit evenwichtspositie, bv. + naar beneden.

Het complete systeem heeft dus 2 V.G. We houden ons bezig met de vrije trillingen, en gaan nu de bewegingsvergelijkingen opstellen, gebruikmakend van het impulstheoremata.

Laat m_1 zich naar beneden bewegen : $\begin{cases} k_1 \text{ rekt uit} \rightarrow -k_1 x_1 \\ k_3 \text{ drukt samen} \rightarrow -k_3 (x_1 - x_2) \end{cases}$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 - k_3 (x_1 - x_2)$$

Laat m_2 zich naar beneden bewegen : $\begin{cases} k_3 \text{ rekt uit} \rightarrow -k_3 (x_2 - x_1) \\ k_2 \text{ drukt samen} \rightarrow -k_2 x_2 \end{cases}$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k_3 (x_2 - x_1)$$

We bekomen aldus stelsel van 2 gekoppelde homogene differentiaalvergelijkingen van de 2e. orde met constante coëfficiënten.

$$\begin{cases} \dots \\ m_1 x_1 + (k_1 + k_3) x_1 - k_3 x_2 = 0 \\ \dots \\ m_2 x_2 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_1 = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Beide vergelijkingen zijn gekoppeld via hun elastische termen ($k_3 x_1$). In matrixvorm betekent dit dat de stijfheidsmatrix niet diagonaal is.

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

traagheidsmatrix

stijfheidsmatrix

Laten we nu de hoofdtrillingsvormen bepalen : bij definitie hebben de massa's dan een beweging met amplitude X_1 en X_2 , en zelfde hoekfrequentie ω en zelfde fasehoek ϕ .

We schrijven dus

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \begin{Bmatrix} \dots \\ x_1 \\ \dots \\ x_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t)$$

Substitutie levert na vereenvoudiging :

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Dit stelt een stelsel lineaire homogene algebraïsche vergelijkingen voor.

De oplossing :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

is triviaal, want stelt de rusttoestand voor.

Om een oplossing te vinden, verschillend van de nuloplossing

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

moet de hoekfrequentie ω de wortel zijn van :

$$\text{Det} \left(\begin{array}{c} \text{dynam.} \\ \text{matrix} \end{array} \right) = 0$$

$$\text{m.a.w.} \quad \begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

Dit is de karakteristieke of frequentievergelijking van het systeem. Uitwerken geeft :

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_3}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right] \omega^2 + \frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{m_1 m_2} = 0 \quad (1.5)$$

Uit deze bikwadratische vergelijking bekomt men 2 wortels :

ω_1^2 ; ω_2^2 waaruit ω_1 en ω_2 ; die de eigenfrequenties van het systeem voorstellen.

Men houdt geen rekening met de negatieve wortels daar deze geen fysische betekenis hebben.

Een systeem met twee graden van vrijheid heeft dus twee eigen frequenties. De algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen bekomt men door superpositie van de hoofdtrillingsvormen als volgt :

-rechtlijnige trillingen in machinesystemen met meerdere vrijheidsgraden

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

waar de X_{ij} en ϕ_i willekeurige constanten voorstellen.

Van de dubbele indices heeft de eerste betrekking op de beschouwde coördinaat en de tweede op de beschouwde eigenfrequentie.

Uit de algebraïsche vergelijkingen haalt men ook de amplitudeverhouding. Bijvoorbeeld uit de vergelijking (1.3) bekomt men :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{k_2 + k_3 - m_2 \omega^2}{k_3}$$

waarin nu de eigenfrequenties moeten gesubstitueerd worden

$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{k_2 + k_3 - m_2 \omega_1^2}{k_3} \quad (\text{eerste mode})$$

$$\frac{X_{12}}{X_{22}} = \frac{k_2 + k_3 - m_2 \omega_2^2}{k_3} \quad (\text{tweede mode})$$

Daarmee kennen we nu dus al de verhouding van de amplitudes. Men kan ook stellen :

$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{1}{u_1}$$

$$\frac{X_{12}}{X_{22}} = \frac{1}{u_2}$$

Zodoende mag men ook de algemene oplossing schrijven onder de vorm :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} X_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{Bmatrix} 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} X_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

alwaar X_{11} , X_{12} , ϕ_1 , ϕ_2 integratieconstanten zijn, die bepaald kunnen worden aan de hand van de beginvoorwaarden. Er zijn vier integratieconstanten, omdat er twee tweede orde vergelijkingen zijn. Merken we nog op dat de 2 homogene algebraïsche vergelijkingen enkel in staat zijn de amplitude verhoudingen

$$1/u_1 \text{ en } 1/u_2$$

te leveren en dat deze een bepaalde waarde hebben, die enkel afhangt van de systeemparameters en de eigenfrequenties (die trouwens zelf uitsluitend afhangen van de systeemparameters) en onafhankelijk zijn van de beginvoorwaarden.

Een hoofdtrillingsvorm of eigenmode treedt op wanneer het ganse systeem synchroon trilt op één der eigenfrequenties. Zo zal men de eerste mode hebben wanneer $X_{12} = 0$, zodat deze eerste mode voorgesteld wordt door :

$$\text{1e. mode : } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix} X_{11} \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1)$$

Hier in is $\begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \end{Bmatrix}$ de modale vector of eigenvector behorende bij de eerste eigenfrequentie van het systeem, en stelt dus de relatieve amplitude van de bewegingen $x_1(t)$ en $x_2(t)$ voor bij $\omega = \omega_1$.

De grootheid $X_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1)$ is harmonisch, en toont aan dat het ganse systeem een synchrone harmonische beweging uitvoert met hoekfrequentie ω_1 en een fasehoek ϕ_1 t.o.v. een willekeurige referentie.

Op analoge wijze treedt de tweede mode op wanneer $X_{11} = 0$, en wordt voorgesteld door :

$$\text{2e. mode : } \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ u_2 \end{Bmatrix} X_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

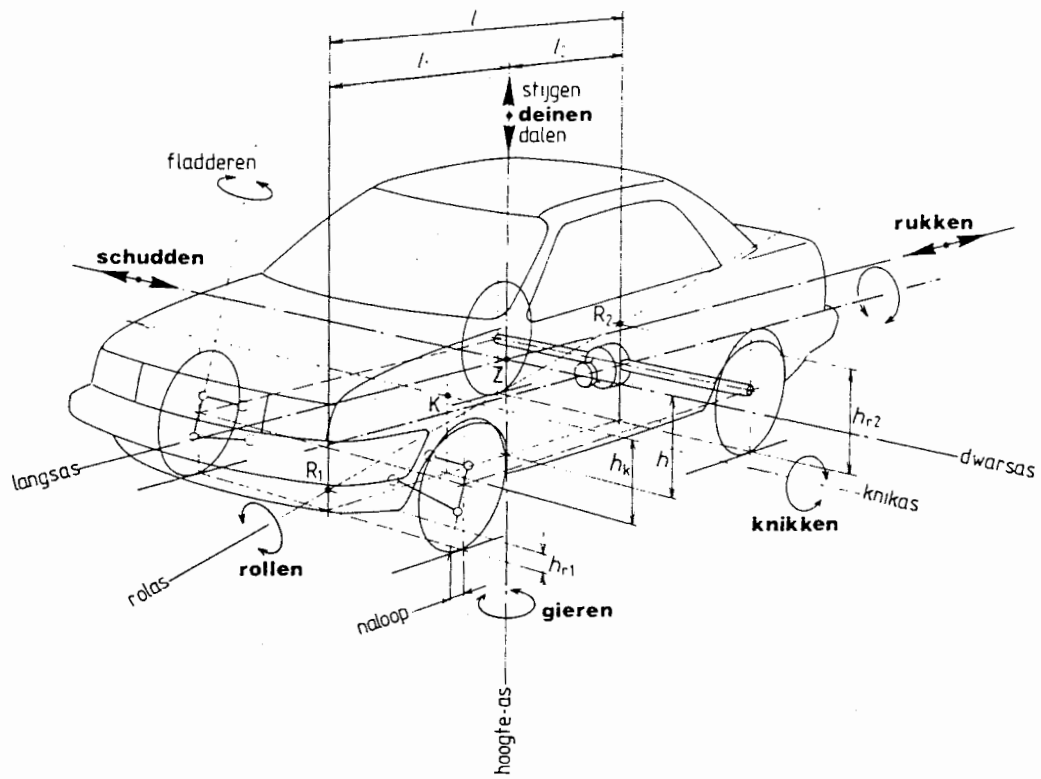
Men kan deze harmonische bewegingen ook gezamenlijk voorstellen :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ X_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

of kortweg $\{x\} = (u)\{p\}$

$$\text{met } (u) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

als modale matrix, d.w.z. een matrix gevormd door de modale vectoren, en $\{p\}$ de vector der hoofdcoördinaten.



f [Hz]	aard van de trilling
1... 2	translatietrillingen van de opbouw
2... 3	rijgedrag
4... 10	voertuiglangstrilling
17... 25	torsietrillingen van de carrosserie (laagste waarde: cabriolet; hoogste waarde: gesloten carrosserie)
20... 30	motortrillingen bij stationaire rotatiefrequentie
22... 29	buigtrillingen van de carrosserie (laagste waarde: cabriolet; hoogste waarde: gesloten carrosserie)
25... 40	stuurwieltrillingen
30... 200	dreun in passagierscompartment
130... 230	aandrijfresonanties (buigtrillingen)
100... 1000	uitlaatsysteem (mechanische en gasdynamische trillingen)
350... 2000	geluidstrillingen van de wisselbak
1000... 5000	motorgeluid

figuur 1.2 : Mogelijke bewegingen van een koetswerk

1.2 Vrije trillingen van een systeem met één massa en twee vrijheidsgraden

Een automobiel is een zeer complex systeem bestaande uit vele verend opgestelde massa's. Het heeft dus zeer veel vrijheidsgraden. De mogelijke bewegingen van het koetswerk zijn weergegeven in fig.1.2 [1]. Fig.1.3 toont ons een vereenvoudigd model met als aantal V.G.

{6 voor carrosserie
{4 voor 4 wielen

Hier heeft men reeds rekening gehouden met het feit dat het koetswerk zich als een star lichaam gedraagt. In de praktijk moet het koetswerk beschouwd worden als een elastisch lichaam. Buigings- en torsietrillingen zijn immers erg belangrijk voor het rijcomfort van de passagiers.

We kunnen het echter al wat vereenvoudigen door enkel de belangrijkste bewegingen te beschouwen :

nl. de op - en neergaande beweging van het koetswerk, de op en neergaande beweging van de wielen, en de draaiende beweging van het koetswerk (as \perp vlak van de figuur) die in het verticale vlak plaats vinden, dat door zwaartepunt gaat in lengterichting van het voertuig. De 2 bewegingen van de carrosserie hebben eigenfrequenties die ongeveer even groot zijn (~ 1 Hz) terwijl de wielen een hogere eigenfrequentie hebben: (6 à 10 Hz). (Fig. 1.4) Men mag bijgevolg zeggen dat deze bewegingen ongeveer onafhankelijk van elkaar geschieden d.w.z. ze beïnvloeden elkaar haast niet. Het probleem wordt dus wel wat eenvoudiger, want dit laat toe de beweging van het koetswerk afzonderlijk te bestuderen. De beweging voor het wiel alleen kan behandeld worden met de theorie van systemen met 1 V.G.

De bewegingen van het koetswerk zullen we nu bestuderen : het is dus een systeem met 2 vrijheidsgraden indien we ons beperken tot de vlakke beweging : een translatie en een rotatie. De invloed van de demping wordt verwaarloosd. (Figuur 1.5)

Z : zwaartepunt

m : massa

I : traagheidsmoment rondom as gaande door G \perp vlak van de figuur

k_1 ; k_2 : veerconstanten

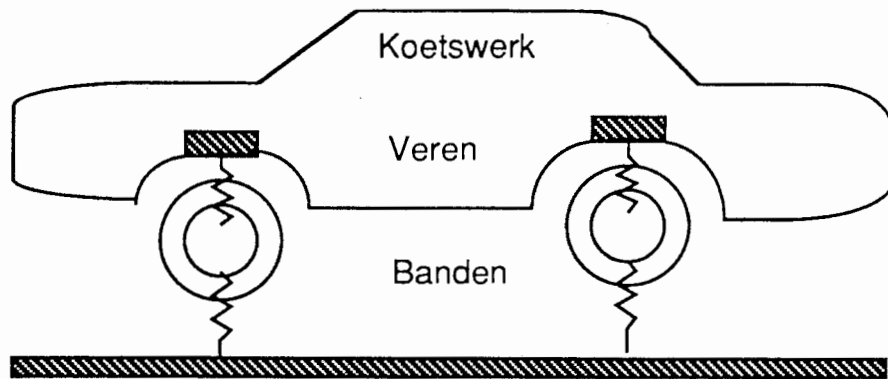
x : op- en neergaande beweging van G

θ : draaiende beweging rondom G.

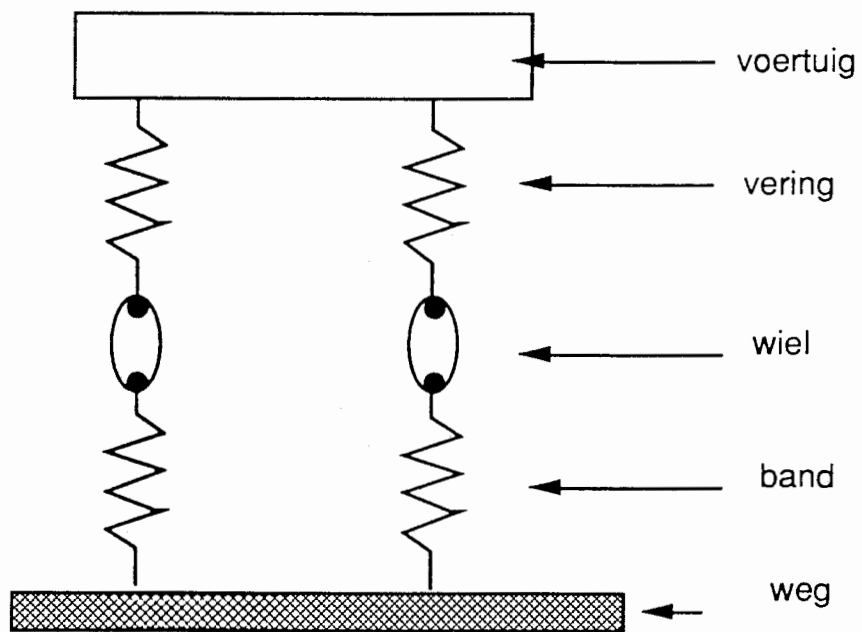
Als het systeem in rust verkeert, bevindt het koetswerk zich op de referentielijn, waarvoor $x = 0$ en $\theta = 0$ geldt

we onderstellen kleine bewegingen : $\text{tg } \theta \cong \theta$.

$$\text{Voor de translatiebeweging geldt : } m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -k_1 (x - l_1 \theta) - k_2 (x + l_2 \theta) \quad (1.6)$$



figuur 1.3 Vereenvoudigd model voor de bewegingen van een koetswerk



figuur 1.4 : Opsplitsen van het model van het koetswerk in 2 deelmodellen, nl. model voor het koetswerk en een model voor de wielen

Voor de rotatiebeweging geldt : $I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = l_1 k_1 (x - l_1 \theta) - l_2 k_2 (x + l_2 \theta)$ (1.7)

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x + (k_2 l_2 - k_1 l_1)\theta = 0 \\ I \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + (l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2)\theta + (k_2 l_2 - k_1 l_1)x = 0 \end{cases} \quad (1.8.a)$$

Men merkt dadelijk op dat als : $k_1 l_1 = k_2 l_2$ de 1e. vergelijking onafhankelijk wordt van θ en de 2e. onafhankelijk van x . De 2 bewegingen zijn dan volkomen onafhankelijk van elkaar. Men noemt $K = k_2 l_2 - k_1 l_1$ dan ook de koppelingscoëfficiënt

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & K \\ K & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.8.b)$$

Als deze koppeling nul is, dan zal een (verticale) kracht toegepast op zwaartepunt G alleen een op- en neergaande beweging tot gevolg hebben terwijl een koppel toegepast op de carrosserie enkel een draaiende beweging tot gevolg zal hebben.

In het algemeen geval echter is $K = k_2 l_2 - k_1 l_1 \neq 0$ en zullen de 2 bewegingen tesamen bestaan en tot een ingewikkelde beweging aanleiding geven.

Beschouwen we de hoofdtrillingsvormen, dan kunnen we de bewegingen x en θ voorstellen door :

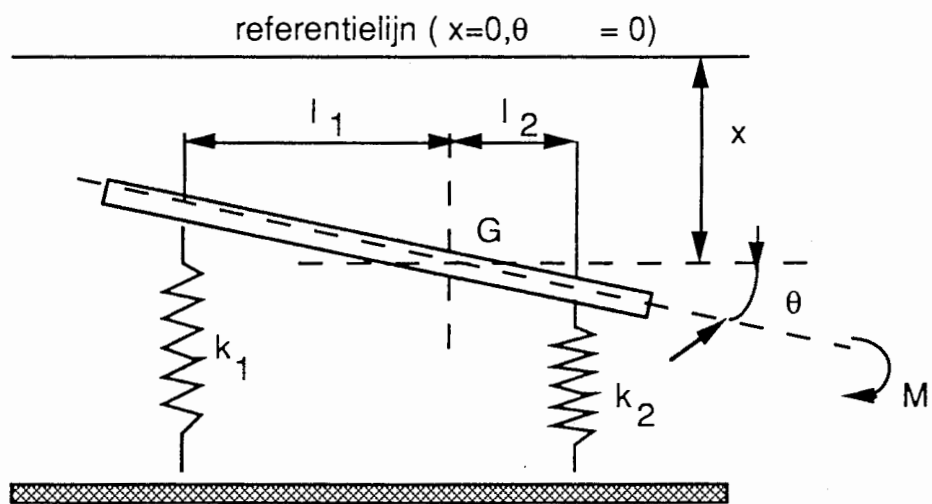
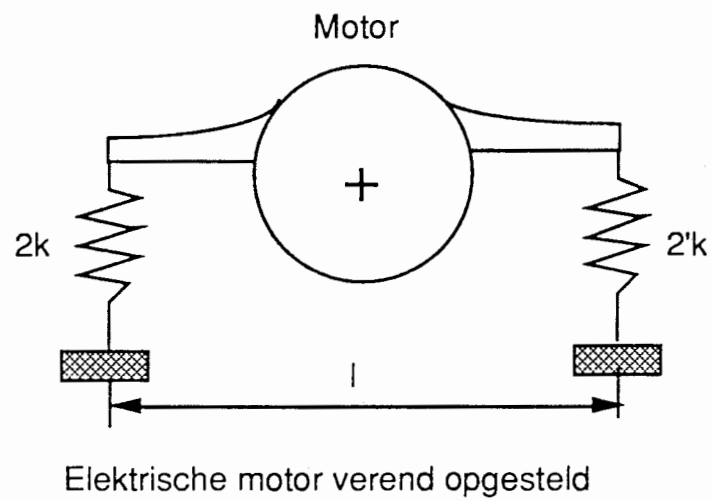
$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} \cos \omega t$$

Hoofdtrillingsvormen : deze worden gekenmerkt door dezelfde cirkelfrequentie en dezelfde faze.

Substitutie geeft :

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & K \\ K & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

-rechtlijnige trillingen in machinesystemen met meerdere vrijheidsgraden



figuur 1.5 : Modellisatie van de beweging van een koetswerk

Uitgewerkt :

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & K \\ K & l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2 - I\omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ \Theta \end{Bmatrix} = 0$$

De enige bewegingen, verschillend van de nuloplossing die hieraan voldoen, hebben een frequentie die men bekomt door de determinant van de dynamische matrix gelijk aan nul te stellen.

$$[k_1 + k_2 - m\omega^2] [l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2 - I\omega^2] - K^2 = 0$$

Delen door m. I geeft :

$$\left[\frac{k_1 + k_2}{m} - \omega^2 \right] \left[\frac{l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2}{I} - \omega^2 \right] - \frac{K^2}{mI} = 0$$

waaruit :

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2}{I} \right] \omega^2 + \left[\frac{K^2}{mI} - \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} \right) \left(\frac{l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2}{I} \right) \right] = 0$$

Frequentievergelijking :

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m} + \frac{l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2}{I} \right] \omega^2 + \frac{k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2}{mI} = 0 \quad (1.9)$$

Bekijken we nu goed de bewegingsvergelijkingen dan zien we dat, indien ze volkomen ontkoppeld zijn, we "ontkoppelde" eigenfrequenties kunnen invoeren :

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad \text{voor ontkoppelde translatie}$$

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2}{I}} \quad \text{voor ontkoppelde rotatie}$$

Met deze nieuwe notatie kunnen we nu de karakteristieke vergelijking onder een andere vorm brengen :

$$\omega^4 - [\omega_x^2 + \omega_\theta^2] \omega^2 + \Delta = 0$$

$$\text{waaruit } \omega^2 = \frac{\omega_x^2 + \omega_\theta^2 \pm \sqrt{[\omega_x^2 + \omega_\theta^2]^2 - 4\Delta}}{2} \rightarrow \omega_1^2 \text{ en } \omega_2^2$$

-rechtlijnige trillingen in machinesystemen met meerdere vrijheidsgraden

Men kan aantonen dat

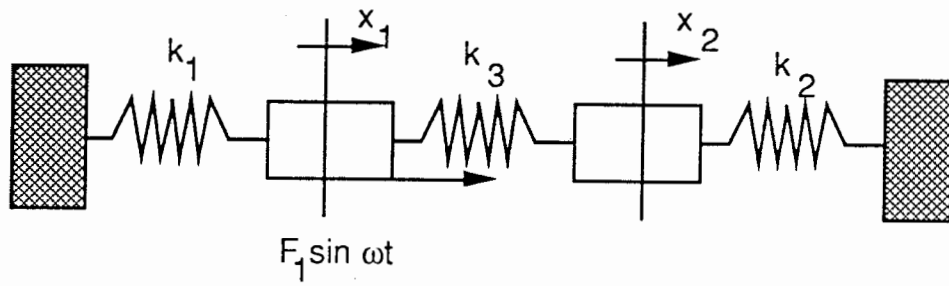
$$\omega_1 < \{ \omega_x ; \omega_\theta \} < \omega_2$$

Verder halen we uit de algebraïsche vergelijkingen :

$$\frac{X}{\Theta} = \frac{-K}{k_1 + k_2 - m \omega^2} = \frac{-\frac{K}{m}}{\frac{k_1 + k_2}{m} - \omega^2} = \frac{-\frac{K}{m}}{\omega_x^2 - \omega^2}$$

Aangezien nu ω^2 2 waarden heeft, waarvan 1 groter en 1 kleiner is dan ω_x^2 zal het systeem 2 hoofdtrillingsvormen (modes) vertonen want voor $\omega^2 < \omega_x^2$ is $\frac{X}{\Theta} > 0$

(in de onderstelling dat $K > 0$) en voor $\omega^2 > \omega_x^2$ is $\frac{X}{\Theta} < 0$.



figuur 1.6

1.3 Gedwongen trillingen van een systeem met 2 vrijheidsgraden .

Systemen zonder demping en met uitwendige periodieke kracht worden thans bestudeerd. (Figuur 1.6)

De bewegingsvergelijkingen worden dan :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \sin \omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Aangezien de demping verwaarloosd wordt zal de permanente beweging ofwel in fase ofwel in tegenfase zijn met de aandrijvende kracht : de oplossing is van de vorm :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin \omega t \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} : \text{amplitude vector}$$

Substitutie levert algebraïsch niet-homogene vergelijkingen :

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_3 - m_1 \omega^2 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Indien ω_1 en ω_2 de wortels zijn van de frequentievergelijking zoals voorheen, dan zal de determinant mogen geschreven worden als :

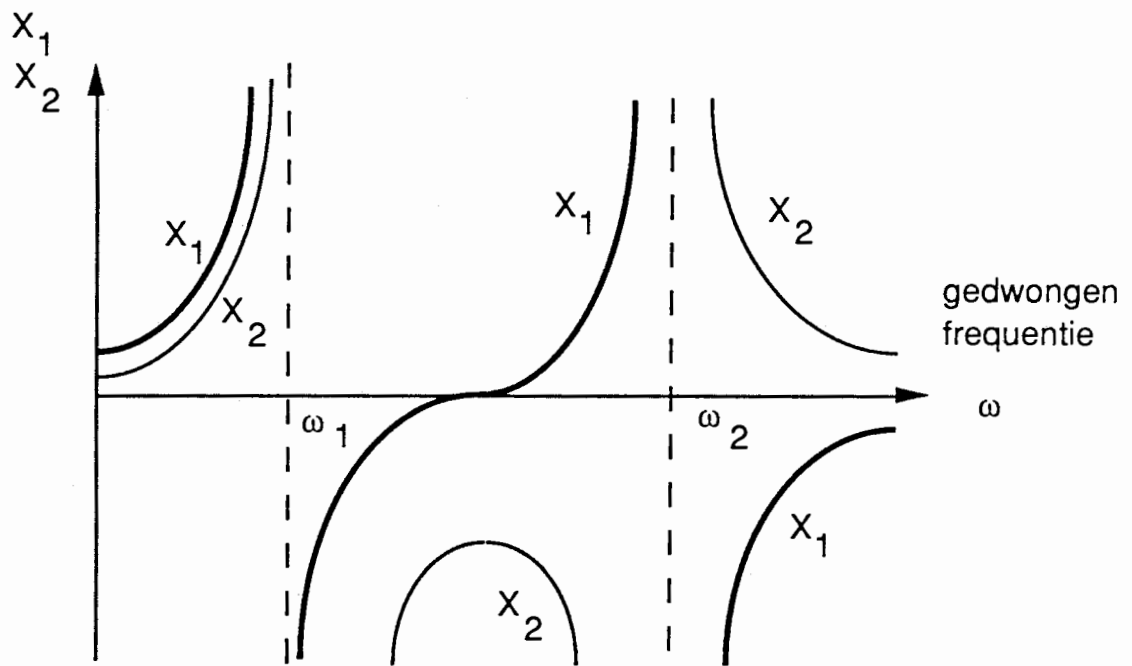
$$D = \begin{vmatrix} k_1 + k_3 - m_1 \omega^2 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)$$

en gebruikmakend van de regel van Cramer, vinden we :

$$X_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_1 & -k_3 \\ 0 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}$$

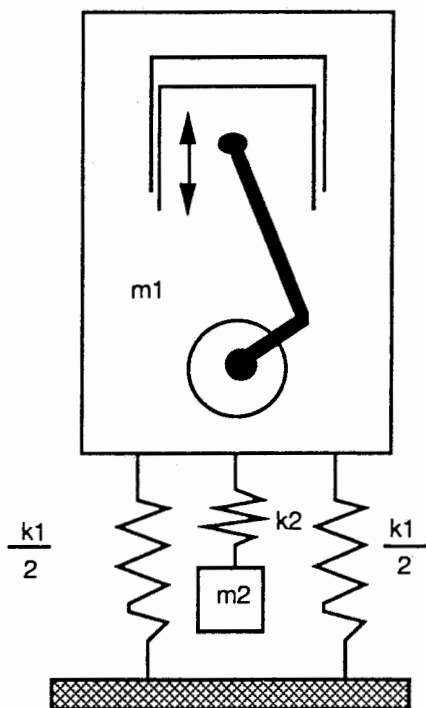
$$X_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k_1 + k_3 - m_1 \omega^2 & F_1 \\ -k_3 & 0 \end{vmatrix}$$

De wortels van D zullen de polen van X_1 en X_2 zijn.

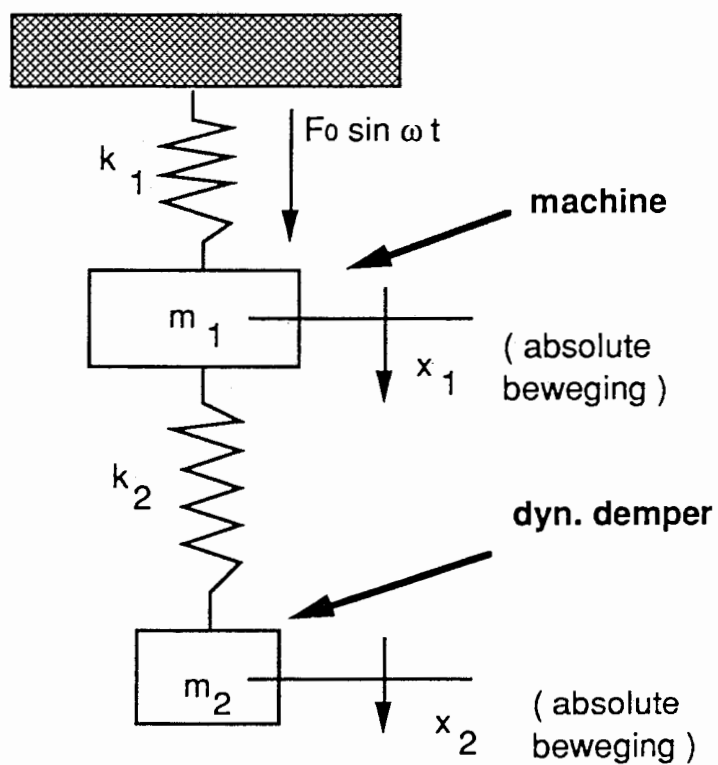


figuur 1.7 : verhouding van de amplitudes X_1/X_2 als functie van de frekwentie ω

In het frequentiediagram (fig. 1.7) merken we op dat bij ω_1 de 2 massa's in dezelfde zin bewegen, en bij ω_2 bewegen ze in tegengestelde zin (faze oppositie).



figuur 1.8 : dynamische trillingsdemper van Frahm [5]



figuur 1.9 : modellisatie van machine en bijhorende trillingsdemper

1.4. De dynamische trillingsdemper

1.4.1 Damping wordt verwaarloosd

Een machine-onderdeel of een machine, waarop een alternerende kracht inwerkt gaat trillen, met de nadelige gevolgen en dit vooral indien de excitatiefrequentie dicht bij de eigenfrequentie ligt. We kunnen hier op verscheidene manieren aan trachten te verhelpen :

1. de alternerende kracht wegwerken - door uitbalanceren bv. (is niet altijd volledig mogelijk bv. bij zuigermachines).
2. de eigenfrequentie van het systeem trachten te veranderen t.o.v. excitatie frequentie om resonantie te vermijden. Dit is het principe van de actieve trillings - isolatie
3. een dynamische trillingsdemper gebruiken, welke uitgevonden werd door Frahm (fig.1.8).

Wij zullen deze laatste mogelijkheid nu nader onderzoeken.

De machine wordt schematisch voorgesteld door de grote massa m_1 opgehangen aan veer k_1 Hierop werkt een harmonische kracht $F = F_0 \cdot \sin \omega t$.

De dynamische trillingsdemper bestaat uit een klein trillend systeem bestaande uit massa m_2 , veer k_2 , vastgemaakt aan de grote massa m_1 (fig.1.9).

Om de trilling van de machine weg te werken, zullen we k_2 en m_2 zodanig kiezen dat dit trillend systeem een gelijke doch tegengesteld gerichte kracht opwekt met dezelfde frequentie. Er moet dus zowel een gelijkheid van frequentie als amplitude vooropgesteld worden.

In het permanent regime wordt de bewegingsvergelijking :

$$\begin{cases} m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) + F_0 \sin \omega t \\ m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = - k_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & - k_2 \\ - k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

De oplossingen kunnen voorgesteld worden door :

-rechtlijnige trillingen in machines-
systemen met meerdere vrijheidsgraden

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cdot \sin \omega t \quad \text{met} \quad \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} : \text{amplitudevector.}$$

Substitutie geeft na vereenvoudiging :

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dit stelsel wordt opgelost m.b.v. de regel van CRAMER.

Aldus vindt men voor de amplitude van de beweging van de machine :

$$X_1 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{F_0}{D} (k_2 - m_2 \omega^2)$$

$$\text{met } D = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) (k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2.$$

Uit de uitdrukking voor X_1 volgt de belangrijke conclusie, dat de machine niet meer trilt voor

$$X_1 = 0 \text{ dus voor } k_2 - m_2 \omega^2 = 0 \text{ op voorwaarde dat } D \neq 0.$$

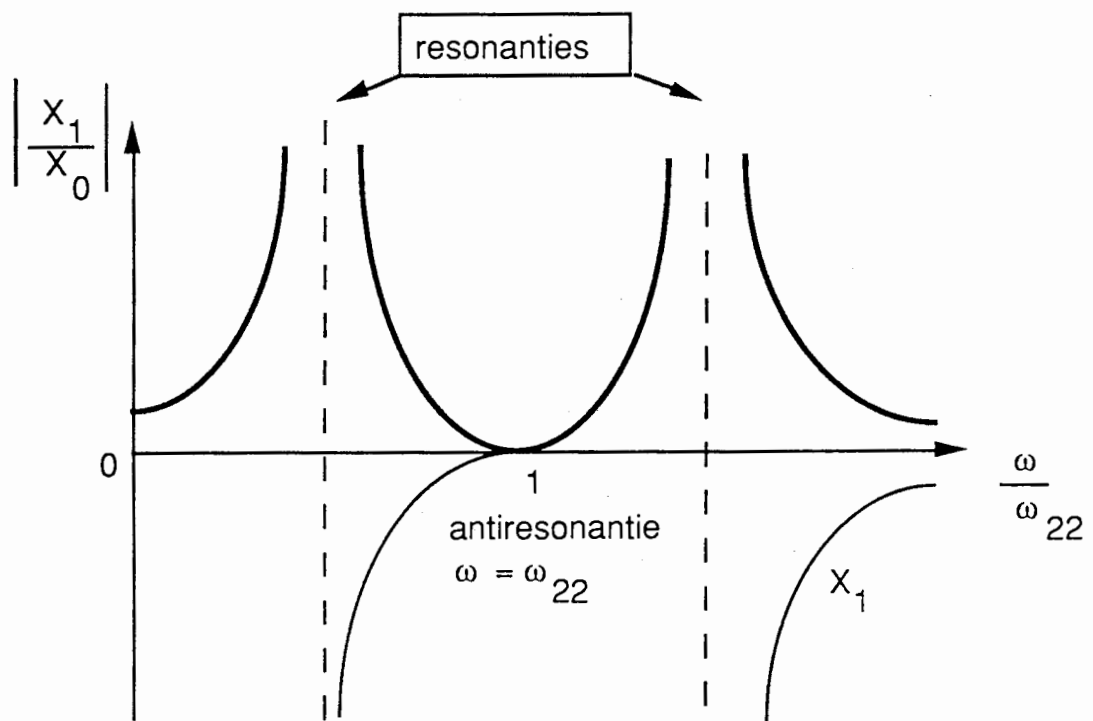
Men kan dit anders schrijven als :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_{22} \quad (1.12)$$

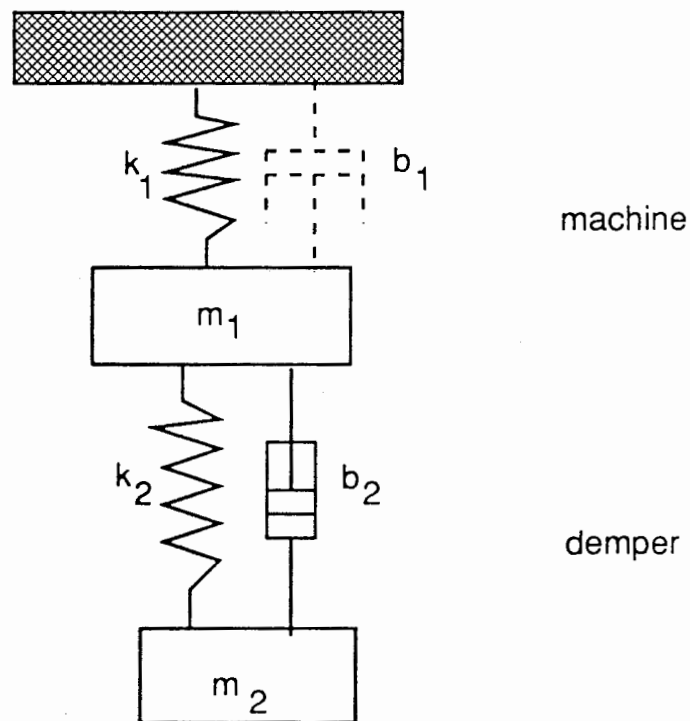
Dit betekent praktisch dat men de dynamische demper met parameters m_2 en k_2 moet "afstemmen" op de frequentie ω van de excitatiekracht F die inwerkt op de machine m_1 .

De beweging van de dynamische demper zelf wordt gegeven door :

$$X_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix} \\ = \frac{F_0 k_2}{D}$$



figuur 1.10 : frekwentiekarakteristiek van machine voorzien van trillingsdemper



figuur 1.11 : het geval van machine met trillingsdemper voorzien van een dashpot

voor $\omega = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ is $D = -k_2^2$ zodat

$$X_2 = -\frac{F_0}{k_2}$$

De veerkracht uitgeoefend door veer k_2 op de machine, is in feite $k_2 (X_2 - X_1)$ doch door $X_1 = 0$ bij de afstemfrequentie, blijft er $k_2 X_2$ over.

We vinden dan :

$$\boxed{k_2 \cdot X_2 = -F_0} \quad (1.13)$$

M.a.w. de veer oefent een kracht uit op massa m_1 , die gelijk doch tegengesteld is aan kracht F_0 die erop inwerkt.

Deze 2 betrekkingen samengenomen laten dus toe de trillingsdemper te ontwerpen.

Inderdaad k_2 en m_2 moeten bepaald worden. X_2 is ook onbekend en er moet voldaan worden aan 2 vergelijkingen.

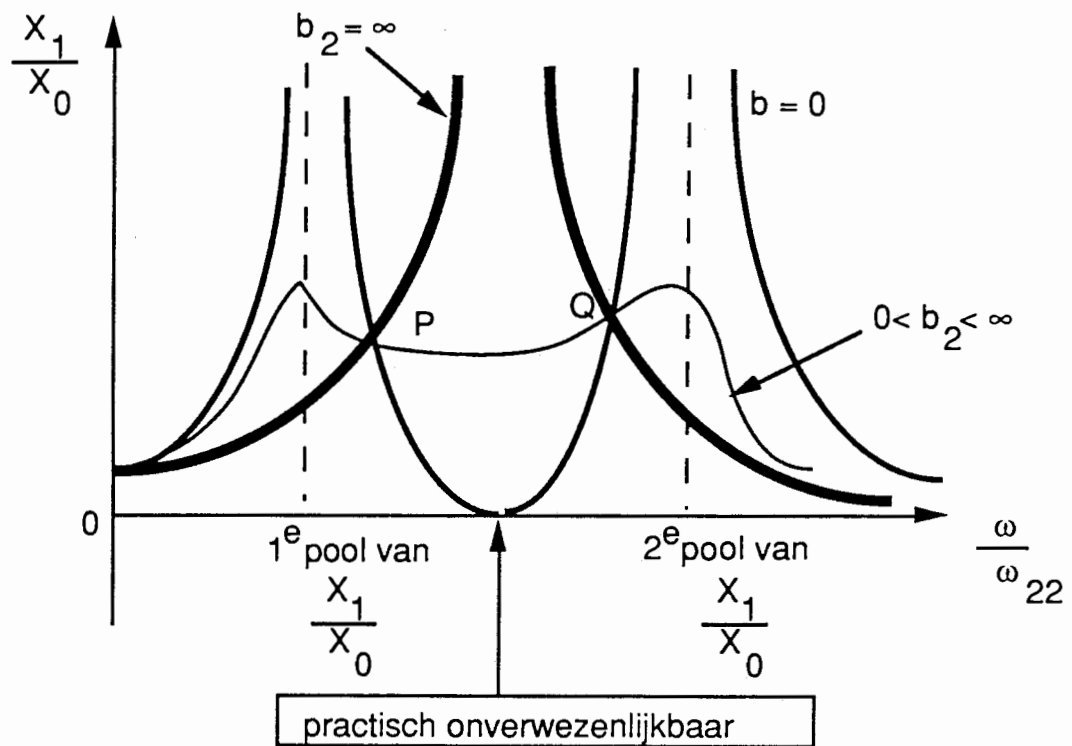
X_2 kan op basis van fysische overwegingen gekozen worden. X_2 stelt namelijk de uitrekking van de veer, die om redenen van inbouw beperkt moet worden. m_2 en k_2 kunnen vervolgens bepaald worden.

Onderzoeken we nu verder het dynamisch gedrag van de trillingsdemper, d.w.z. het gedrag in het frequentiegebied.

We beschouwen de $\frac{X_1}{X_0}$, met $X_0 = \frac{\Delta}{F_0 / k_1}$ en stellen deze grafisch voor in functie van

$$\omega / \omega_{22} \text{ met } \omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

We merken nu op, dat de dynamische trillingsdemper alleen effectief is op de frequentie $\omega = \omega_{22}$ d.w.z. op zijn eigenfrequentie (**fig. 1.10**). Hij kan dus enkel aangewend worden daar waar de excitatiefrequentie een constante waarde heeft bv. een synchrone elektrische machine of een diesel-motor die op een constant toerental draait.



figuur 1.12 : de amplitudeverhouding X_1/X_0 als functie van de frekwentie

Doch in geval van motoren (bv. automobiel motoren) die op variabel toerental draaien is dit soort trillingsdemper ongeschikt, want heel het frequentiegebied wordt noodzakelijkerwijs doorlopen en men ontmoet steeds 2 resonanties !

1.4.2. Dynamische trillingsdemper voorzien van dashpot (fig 1.11)

De bedoeling van de dashpot is de 2 lastige resonantiepieken, die aan weerszijden van de afstemfrequentie optreden, te verkleinen en eventueel, weg te werken. De wiskundige studie laten we achterwege. We bespreken het geval aan de hand van fysische redenering (fig 1.12).

Het geval $b_2 = 0$ hebben we wiskundig behandeld. Dit gaf aanleiding tot 2 pieken

waarbij : $\frac{X_1}{X_0} \rightarrow \infty$ ging.

Indien $b_2 = \infty$ dan zijn m_1 en m_2 vast aan elkaar verbonden en we hebben dus in feite te maken met één enkele trillende massa : $m_1 + m_2$. Er is slechts één

vrijheidsgraad en dus 1 resonantie piek, die ook weer $\frac{X_1}{X_0} \rightarrow \infty$ oplevert aangezien

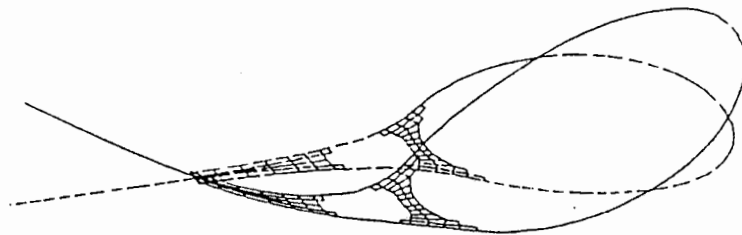
het globale systeem niet gedempt is in dit bijzondere geval (tenzij $b_1 \neq 0$).

We kunnen ons dus inbeelden dat voor een tussenwaarde van b_2 de pieken gedempt worden, en dat zelfs voor een bepaalde waarde van b_2 deze demping optimaal is.

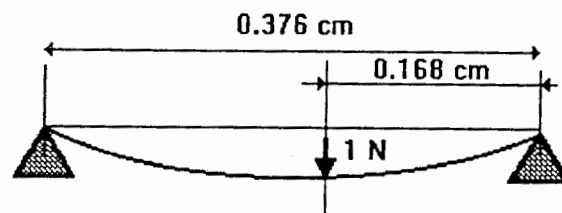
Het nadeel van dit compromis is dat $X_1 = 0$ niet meer verwezenlijkt kan worden.

Door de aangepaste keuze van de diverse parameters van het systeem kan men verschillende dempingsstrategieën beogen. Men zou bv. de pieken een minimale en gelijke hoogte kunnen geven, ofwel het minimum zo laag mogelijk houden.

Alles hangt af van de toepassing : moet er over een breed of een smal frequentiebereik gedempt worden. De praktische uitwerking kan hier gebeuren aan de hand van een computersimulatie.



figuur 1.13: Buigingsmode van een tennisraket



figuur 1.14: Bepaling van de buigingsstijfheid op de positie van de trillingsdemper [7]

1.4.3 Toepassingsvoorbeelden

Twee praktische toepassingen zullen hier behandeld worden :

- a. toepassing van een dynamische trillingsdempers bij een stationair draaiende machine (vaste excitatiefrekwentie)
- b. toepassing van een dynamische trillingsdempers voor de onderdrukking van vrije trillingen (bij resonantiefrekwentie)

1.4.3.1 Dynamische trillingsdempers van een dieselmotor [6]

Een dieselmotor weegt 3000 N, en veroorzaakt trillingen bij een rotatiefrekwentie van 100 Hz. Bepaal de parameters voor de dynamische trillingsdempers als de excitatiekracht gelijk is aan 250 N en de maximum toelaatbare verplaatsing van de massa van de trillingsdempers 2 mm bedraagt. Dit probleem wordt als volgt opgelost :

$$|F_0| = k_2 x_2 = m_2 \omega^2 x_2$$

$$m_2 = \frac{250}{(0.002) (100 \cdot 2\pi)^2} = 0.31665 \text{ kg}$$

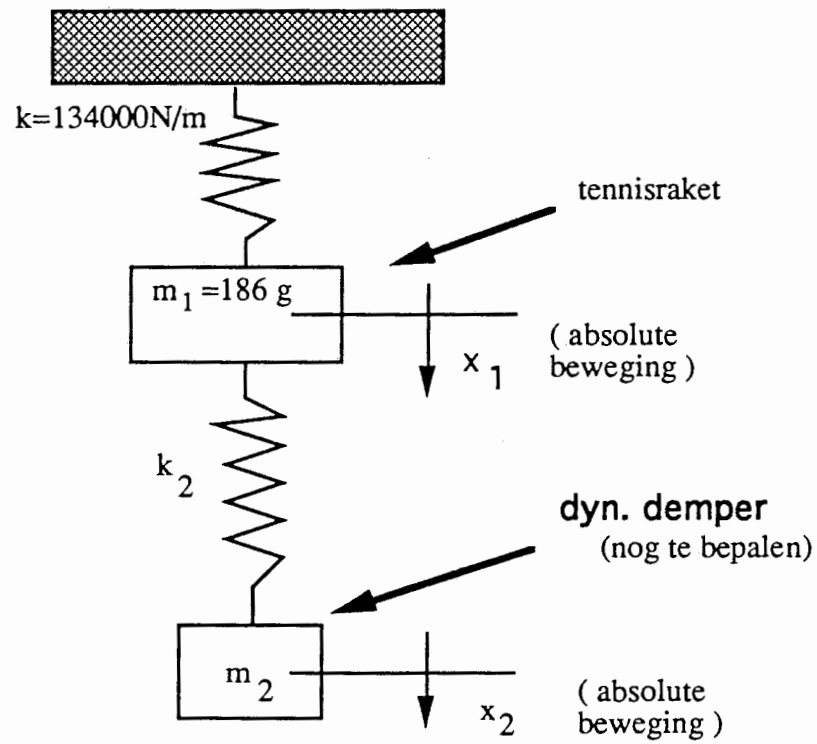
$$k_2 = \omega^2 m_2 = (628.32)^2 (0.31665) = 125009 \text{ N/m}$$

1.4.3.2 Dynamische trillingsdempers van een tenniskraket [7]

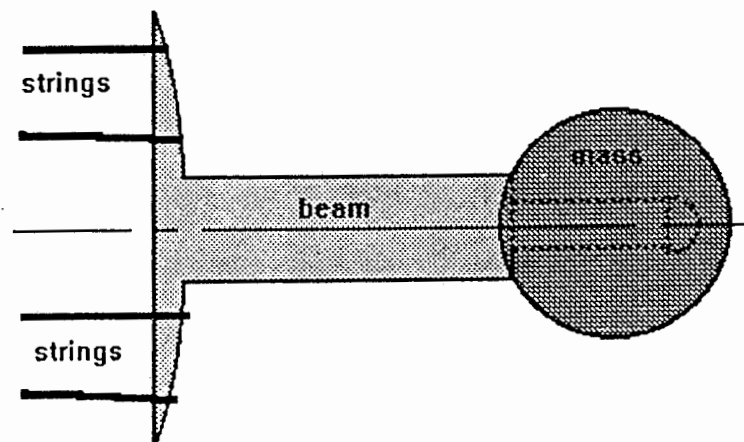
Tenniskraketten voor jongeren dienen omwille van hun beperkt gebruik voordelig geprijsd te zijn. Daarom worden ze dikwijls uit aluminium i.p.v. hout of komposietmaterialen gemaakt. Het nadeel van aluminium is zijn lage interne demping, waardoor trillingen op resonantiefrekwenties heel hinderlijk kunnen worden.

Om dit probleem op een efficiënte manier op te lossen kan gebruik gemaakt worden van een dynamische trillingsdempers. Deze dynamische trillingsdempers worden afgestemd op de voornaamste resonantiefrekwentie van de tenniskraket. Deze stemt overeen met de buigingsmode van de tenniskraket (**Figuur 1.13**) welke een eigenfrequentie heeft van 135 Hz.

De trillingsdempers moet hier gedimensioneerd worden rekening houdende met de lage massa van de raket (320 g).



figuur 1.15 : Ekwivalent massa-veer model



figuur 1.16 : Lay-out van de gebruikte dynamische trillingsdemper

Om nu de trillingsdemper te berekenen, gebruikmakende van de geziene theorie, zullen we allereerst deze tenniskraket herleiden tot een massa-veersysteem.

Hiertoe modelleren we de tenniskraket als balk.

De buigingseigenfrequentie van een balk met vrije randvoorwaarden wordt gegeven door :

$$f = \frac{22.4}{2\pi \ell^2} \sqrt{\frac{EI}{M}}$$

f , ℓ , M zijn gekend uit de metingen.

f = resonantiefrequentie = 135 Hz

ℓ = 0.68 m

M = 0.32 kg

EI kan bepaald worden :

$$EI = 145 \text{ N/m}^2$$

In principe dient enkel I bepaald te worden daar E gekend is voor aluminium. I stelt het equivalent traagheidsmoment voor, daar het traagheidsmoment van de raket varieert.

Vervolgens zal men om het systeem te herleiden tot een massa-veer systeem met 1 vrijheidsgraad de lokale stijfheid bepalen op die plaats waar men later de dynamische trillingsdemper wenst aan te brengen. Dit is volledig analoog met de bepaling van de buigingsstijfheid op de plaats van de schijf bij het bepalen van buigingskritische snelheden.

Dit gebeurt via de formules uit de sterkteleer (zie figuur 1.14)

$$s = \frac{F\ell^3}{3EI} \frac{(0.376 - 0.168)^2}{(0.376)^2} \frac{(0.168)^2}{(0.376)^2} = 7.47 \mu\text{m}$$

met $EI = 145 \text{ N/m}^2$

$F = 1 \text{ N}$

$\ell = 0.68 \text{ m}$

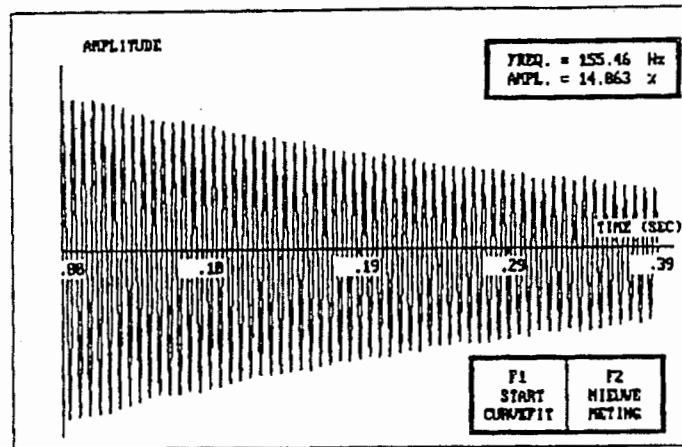
De lokale stijfheid is dan :

$$k = \frac{1}{s} = 134\,000 \text{ N/m}$$

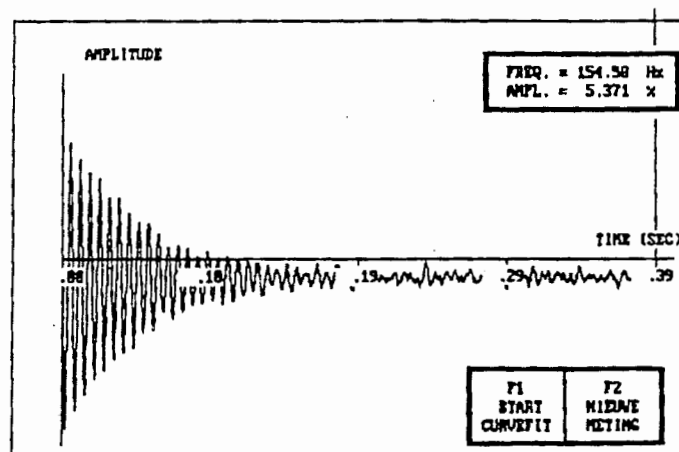
-rechtlijnige trillingen in machinesystemen met meerdere vrijheidsgraden

Thickness mass [mm]	Mass [gram]	resonant frequency [Hz]
0	0	575
2	0.372	241
4	0.744	183
6	1.116	154
8	1.489	135
10	1.861	122
12	2.233	112
14	2.605	104
16	2.977	98
18	3.349	92

Tabel 1.1 : Eigenfrequentie van de dynamische trillingsdemper als functie van de massa [7]



figuur 1.17 a: Damping bij eigenfrequentie [7] zonder dynamische trillingsdemper



figuur 1.17 b: Damping bij eigenfrequentie [7] met dynamische trillingsdemper

Vermits we het dynamisch gedrag van de tennisraket wensen te bestuderen, dienen eigenfrequentie van de tennisraket en het model dezelfde te zijn. Uit de kennis van k en f kan men dan de ekwivalente massa bepalen.

De overeenstemmende massa van de tennisraket om dezelfde eigenfrequentie te bekomen is dan

$$m = \frac{k}{(2\pi f)^2} = 186 \text{ g}$$

De raket heeft als ekwivalent model het massa-veersysteem voorgesteld in **Figuur 1.15**.

De gebruikte dynamische trillingsdemper bestaat uit een plastieken balk met een (verwijderbare) rubberen massa. (zie **figuur 1.16**). Deze rubberen massa mag niet te groot zijn (max 4 g) omdat anders de speleigenschappen van de tennisraket fundamenteel gaan veranderen.

De gekozen materialen zijn voor de balk een lage dichtheidspolyethyleen ($\rho = 840 \text{ kg/m}^3$, $E = 350 \text{ M Pa}$, $\ell = 3 \text{ cm}$) en een massa uit Santoprène rubber. Deze massa zal zodanig gekozen worden dat de resonantiefrequentie van het systeem balk - rubberen massa gelijk is aan de resonantiefrequentie van de tennisraket. Om de vereiste massa van de rubberen schijf te bepalen kan men via eindige elementenmethode (of experimenteel) de resonantiefrequentie berekenen (**Tabel 1.1**).

Uit deze tabel blijkt dat een massa van 1.489 g voldoende is om de voorwaarden van dynamische trillingsdemping te garanderen.

Dat dit wel degelijk zo is in de praktijk wordt bewezen in **Figuur 1.17** waar **figuur 1.17 a** de vrije trilling van de aluminiumraket voorstelt zonder trillingsdemper en **Figuur 1.17 b** met trillingsdemper.

Referenties

1. Arkenbosch M., Mom G., Nieuwland J.
"Het rijdend gedeelte" deel 4A , " De Automobiel"
Kluwer, Deventer 1989.
2. Timoshenko S., Young D.H., "Vibration Problems
in Engineering"
Van Nostrand, New-York, 1954.
3. Janssens P., "Mécanique Rationnelle" (2 delen)
Dunod, Paris, 1968.
4. Den Hartog, J.P. "Mechanical Vibration"
Mc Graw-Hill, London , 1956.